جبر بول $D(n)$

1) $n = p_1 p_2 \cdots p_n$; $p_i \neq p_j$ $\Leftrightarrow$ $D(n)$ هي شبكة توزيعية متممة

2) $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_n$; $\alpha_1, \alpha_2 \geq 2$ $\Leftrightarrow$ $D(n)$ شبكة توزيعية غير متممة

- إن $D(n)$ هي شبكة بول $\Leftrightarrow$ n/x ، x أوليان نسبياً في $D(n)$ $x \in$ "أوليان فيما بينهما"

- إذا كان x ، n/x

$$n = k.p^2$$

أي أن n يقبل القسمة على مربع العدد الأولي p وبالعكس إذا كان يوجد عدد أولي مربعه p يقسم العدد n فإن p ، n/p غير أوليين نسبياً

- إن $D(n)$ هي شبكة بول إذا وفقط إذا كان: n لا يقبل القسمة على مربع عدد أولي.

أي أن n هو من الشكل: $n = p_1 p_2 \cdots p_r$

حيث $p_i \neq p_j$ ، p_i عدد أولي

فإذا توفر هذا الشرط على العدد n وعرفنا على $D(n)$ العمليتين الثابتتين (1)، (0) كما يلي: بالإضافة للعملية الأحادية

$$x + y = \gcd[\operatorname{lcm}(x,y), \operatorname{lcm}(n/x, n/y)]$$

$$= (x \vee y) \wedge (x \wedge y)' = (x \vee y) \wedge (x' \vee y')$$

$$x \cdot y = \gcd(x,y)$$

$$x' = n/x$$

فإن $(D(n), +, \cdot, ', 0, 1)$ تشكل جبراً بوليانياً

مثال1: أنجز العمليات على $(D(30), +, \cdot, ', 0, 1)$

$D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$

+	1	2	3	5	6	10	15	30
1								
2								
3				15				
5								
6								
10								
15								
30								

·	1	2	3	5	6	10	15	30
1								
2								
3								
5								
6								
10								
15								
3								

x	x'
1	
2	
3	
5	
6	
10	
15	
30	

مثال2: لتكن لدينا المجموعة المؤلفة من العنصرين $B=\{0,1\}$

	0	1
0	0	1
1	1	1

	0	1
0	0	0
1	0	1

x	0	1
x'	1	0

عند ما نبين أن $B\{0,1\}$ تشكل جبر أ بوليانيا:
$(B,+,\cdot,',0,1)$
نلاحظ
$a.b=\min(a,b)$
$a+b=\max(a,b)$
وبالنظر إلى الجدول نلاحظ شروط جبر بول
1- التبديل
2- التجميع
3- المحايدات
4- ولكل عنصر متمم
لنتحقق من التوزيع:
$a+b.c=(a+b)(a+c)$
حسب المبدأ الأساسي في العد فإن عدد الحالات التي يجب التحقق منها هو 2^3

$a+b.c$	$(a+b)(a+c)$
$0+0.0=0$	$(0+0).(0+0)=0$
$0+0.1=0$	$(0+0).(0+1)=0$
$1+1.1=1+1=1$	$(1+1)(1+1)=1.1=1$

وبنفس الطريقة نحاول نتحقق من القانون الثاني:
$a.(b+c)=ab+ac$

* مبدأ الثنوية

رأينا في تعريف جبر بول أن كل خاصية تتكون من جزأين ولاحظنا أن كل جزء يمكن الحصول عليه من الجزء الآخر بالمبادلة بين العاملين (+) ، (.) وبين العنصرين 0 ، 1

فمثلاً نجد العبارة $x.1=x$ ثنوية العبارة $x+0=x$

- وهكذا فإنه في الجبر البولياني أن كل نظرية أو مبرهنة مستنتجة من المبادئ الخمسة السابقة للجبر البولياني (B,+,.,',0,1) تبقى صحيحة عند تستبدل احدى العاملين (.) ، (+) بالأخرى والعنصران 0 ، 1 احداهما بالآخر وبواسطة الثنوية يكتفى بالبرهان على نظرية ما ونستنتج مباشرة صحة ثنويتها.

(ج) بعض خواص جبر بول:

- مبرهنة: إذا كانت (E,+,.,',0,1) جبراً بوليانياً عندئذ إن عناصر E والعمليات عليها تحقق الخواص التالية:

1- قوانين اللانمو: $x+x=x$ ، $x.x=x$

2- $x.0=0$ ، $x+1=1$

3- إذا كان x أي عنصر من E وكان a عنصراً من E ويحقق الخاصة: $a.x=0$ ، $a+x=1$

إذا a هو متمم العنصر x.

4- $(x')'=x$ ، $0'=1$ ، $1'=0$

5- يتحقق قانونا دي مورغان:

$(x+y)'=x'.y'$

$(x.y)'=x'+y'$

6- يتحقق قوانين الامتصاص:

$x(x+y)=x$ ، $x+(x.y)=x$

الإثبات :

1- $x + x = (x+x).1 = (x+x)(x+x')$
$= x + x.x' = x + 0 = x$

وحسب مبدأ الثنوية في جبر بول تتحقق المساواة الثانية.

2- $x + 1 = x + (x + x') = (x+x) + x'$
$= x + x' = 1$

وحسب مبدأ الثنوية فإن $x.0 = 0$

3- نفرض أن $x' = x'.1 = x'.(a+x)$
$= x'.a + x'.x = x'.a + 0$
$= x'.a + (a.x) = a(x'+x) = a.1 = a$

4- • $1 + 0 = 1 , \quad 1.0 = 0$
$\Rightarrow 1' = 0 , \quad 0' = 1$

• $x + x' = 1 , \quad x.x' = 0$
$\Rightarrow (x')' = x$

5- $(x+y) + x'.y' = (x+y+x').(x+y+y')$
$= (1+y).(1+x) = 1.1 = 1$

$(x+y).(x'.y') = (x+y) \quad x(x'y') + y(x'y')$
$0.x' + 0.y'$
$= 0 + 0 = 0$

نستنتج أن

$(x+y)' = x'.y'$

وحسب مبدأ الثنوية نستنتج الثاني : $(x.y)' = x' + y'$

6- $x.(x+y) \overset{?}{=} x$

$d_1 : x.(x+y) = x + xy = x.1 + xy$
$= x(1+y) = x.1 = x$

$1=$ حسب (2)

وحسب مبدأ الثنوية ينتج قانون الامتصاص الثاني.

إن هذه الخواص بالإضافة إلى الشروط الواردة في تعريف جبر بول تقيد تأتي بها هي بين المخططات ذات العلاقة في جبر بول وكذلك في تبسيطها واختصار العبارات البولانية وكذلك في تصميم الدارات في الحواسيب الإلكترونية كما سنرى لاحقا.

مثال 1: اثبت أن:

في جبر بول

1) $a + a'b = a + b$

2) $a(a' + b) = a.b$

الحل:

1) $a + a'b = (a + a')(a + b) = 1.(a + b) = a + b$

2) $a.(a' + b) = a.a' + ab = 0 + a.b = a.b$

مثال 2: أثبت أن في جبر بول:

3) $(a+b)(a'+c)(b+c) = (a+b)(a'+c)$

4) $a.b + a'.c + bc = a.b + a'c$ الثنوية لها:

الحل:

1) $(a+b)(a'+c)(b+c) = (a+b)(a'+c)(a.a' + b + c)$

$= (a+b)(a'+c)(a+b+c)(a'+b+c)$

$= (a+b)(a+b+c)(a'+c)(a'+c+b)$

حسب قانون الامتصاص

$= (a+b)(a'+c)$

والعلاقة (4) تنتج حسب مبدأ الثنوية باستبدال كل (.) بـ (+) وبالعكس.

ملاحظات: للحصول على متمم عبارة بوليانية f
نقوم بالمبادلات بين $(+)$، $(.)$ وتناخذ المتمم لكل متغير

مثال: أوجد متمم العبارة

$$f = x.y + xyz' + x'y'$$

الحل:

$$f' = x' + y' . (x' + y' + z) . (x + y)$$

6) جبر بول الجزئي:

- لتكن B مجموعة جزئية من جبر بول إذا كانت B تحتوي العنصرين 0، 1 ومغلقة وتقصد العمليات في E تحقق جميع شروط جبر بول فإنها تشكل جبر أبوليانياً جزئياً في E

- الشرط اللازم والكافي لكي تكون B جبراً بوليانياً جزئياً: لتكن $(B, +, ., ', 0, 1)$ و $A \subseteq B$
يكون A جبر بولياني جزئي من B إذا وفقط إذا تحقق:

1) A تحتوي العنصرين $0, 1$

2) من اجل أي عنصرين فان A مغلقة بالنسبة للضرب والجمع.

$\forall x, y \in A ; x + y \in A , x.y \in A$

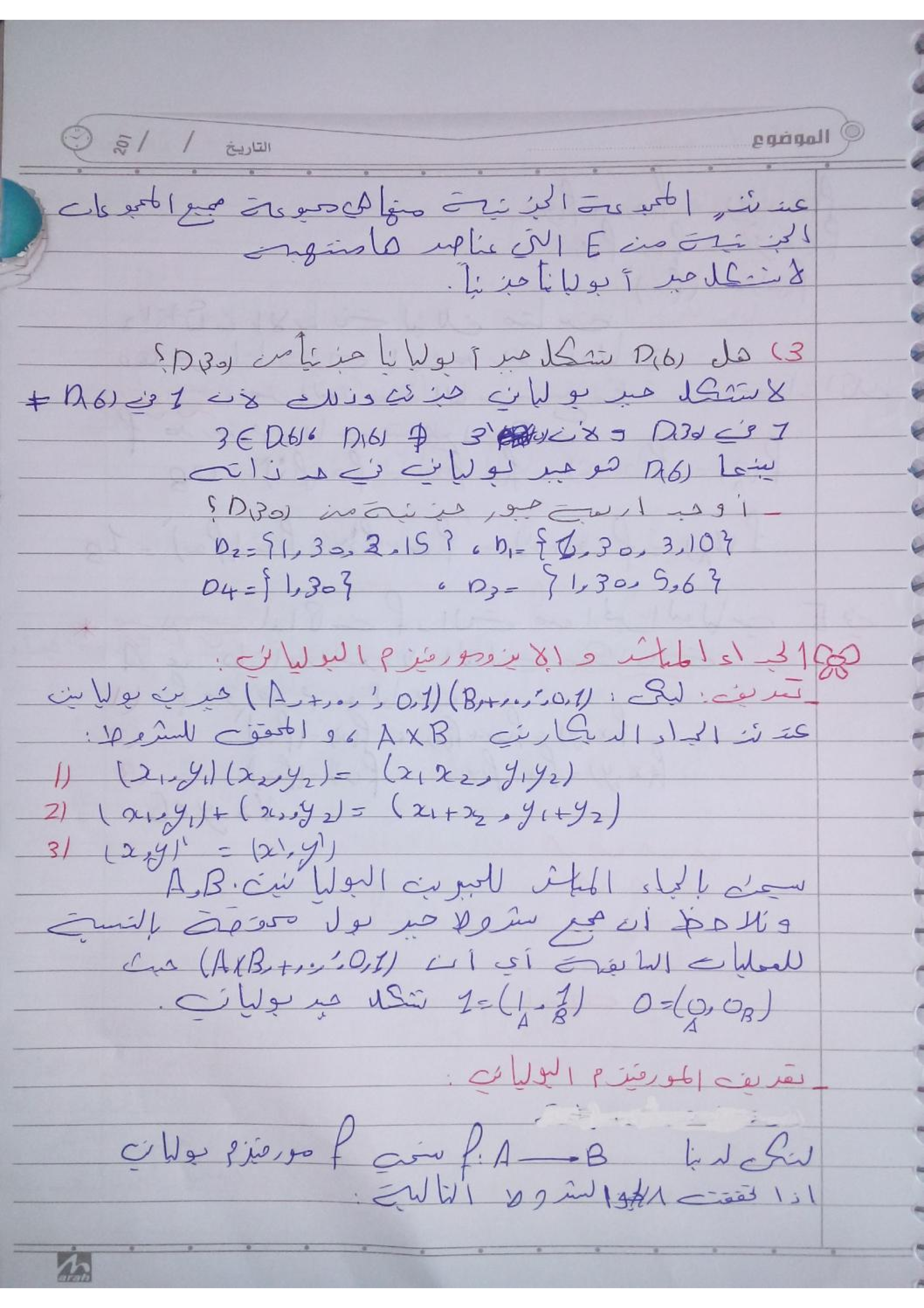
3) $\forall x \in A ; x' \in A$

عندها نستنتج A جبر بول جزئي.

أمثلة:

1) ليكن $(B, +, ., ', 0, 1)$ جبر بول وليكن $x \in B$ بحيث أن $1 \neq x \neq 0$ عندئذ ان المجموعة $\{0, 1, x, x'\}$ هي جبر بول جزئي من B. مولد بـ x أو مولد بـ x'

2) لنأخذ الجبر البولياني $(P(E), \cup, \cap, ', \emptyset, E)$
حيث E مجموعة غير منتهية



عندئذٍ المجموعة الجزئية منها هي مجموعة جميع المجموعات الجزئية من E التي عناصرها منتهية لا تشكل جبراً بوليانياً جزئياً.

3) هل $D(6)$ تشكل جبراً بوليانياً جزئياً من $D(30)$؟

لا تشكل جبر بولياني جزئي وذلك لأن 1 في $D(6)$ ≠ 1 في $D(30)$ ، لأن $3' \notin D(6)$ ، $3 \in D(6)$

بينما $D(6)$ هو جبر بولياني في حد ذاته

- أوجد أربعة جبور جزئية من $D(30)$؟

$D_1=\{1,30,3,10\}$ ، $D_2=\{1,30,2,15\}$

$D_3=\{1,30,5,6\}$ ، $D_4=\{1,30\}$

الجداء المباشر و الإيزومورفيزم البولياني:

- تعريف: ليكن $(A,+,\cdot,',0,1)$ ، $(B,+,\cdot,',0,1)$ جبرين بوليانيين

عندئذ الجداء الديكارتي $A\times B$ ، و المحقق للشروط:

1) $(x_1,y_1)(x_2,y_2)=(x_1x_2,\ y_1y_2)$

2) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$

3) $(x,y)'=(x',y')$

يسمى بالجداء المباشر للجبرين البوليانيين A, B.

ونلاحظ أن جميع شروط جبر بول محققة بالنسبة للعمليات السابقة أي أن $(A\times B,+,\cdot,',0,1)$ حيث $0=(0_A,0_B)$ ، $1=(1_A,1_B)$ تشكل جبر بولياني.

- تعريف المورفيزم البولياني:

ليكن لدينا $f: A\longrightarrow B$ يسمى f مورفيزم بولياني إذا تحققت الشروط التالية:

$f(x+y) = f(x) + f(y)$
$f(x.y) = f(x).f(y)$
$f(x') = (f(x))'$

وإذا كان بالإضافة لذلك متباين
وعامر فإننا نسميه ايزومورفيزم بوليانى.

نتيجة: من التعريف السابق ينتج مباشرة أنه إذا كان f مورفيزم بوليانى نستطيع نكتب:

$$f(0_A) = f(x.x') = f(x).f(x') = f(x)(f(x))' = 0_B$$

$$f(1_A) = f(x+x') = f(x)+f(x') = f(x)+(f(x))' = 1_B$$

* مبرهنة: إذا كانت f دالة من الجبر البوليانى E في A عندها إن الشروط التالية متكافئة:

1) f مورفيزم بوليانى
2) $f(x+y) = f(x)+f(y)$ ، $f(x') = (f(x))'$
3) $f(x.y) = f(x).f(y)$ $f(x') = (f(x))'$
$\forall x,y \in E$

انتهت